Παράσταση Πολυωνύμου Παρεμβολής σε μορφή Lagrange

Από την ιδιότητα μοναδικότητας του πολ. παρεμβολής προκύπτει ότι το πολυώνυμο $L_i \in \mathbb{P}_n$ τέτοιο ώστε $L_i(x_j) = \delta_{ij}$, $j=0,1,2,\dots,n$, $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ διακρ. μεταξύ τους, δ_{ij}: το δέλτα του Kronecker, γράφεται ως

$$L_i(x) = a_i \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x-x_j), \quad a_i \in \mathbb{R}$$

Το a_i υπολογίζεται από τη σχέση $L_i(x_i) = 1$

$$L_i(x_i) = a_i \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x_i-x_j) = 1 \iff a_i = \frac{1}{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x_i-x_j)}$$

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$, πολυώνυμο Lagrange

$L_0(x), L_1(x) \dots L_n(x)$

Το πολ. παρεμβολής της f στα σημεία $x_0, x_1, \dots, x_n$ διακρ. μεταξύ τους γράφεται ως: $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)$ επειδή

$P_n(x_k) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x_k) = f(x_k)$, $k=0,1,2,\dots,n$ και λόγω της μοναδικότητας.

Παράδειγμα:

Να βρεθεί το πολ. παρεμβολής $P_3 \in \mathbb{P}_3$, που παρεμβάλλει τις τιμές της συνάρτησης f στα σημεία

x_i	-1	0	1	2
f_i	2	0	0	8

$$P_3(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + f(x_3)L_3(x)$$

$$= 2\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)} + 8\frac{(x+1)(x-0)(x-1)}{(2+1)(2-0)(2-1)} = -\frac{1}{3}(x^3-3x^2+2x) + \frac{4}{3}(x^3-x)$$

$$= x^3 + x^2 - 2x$$

Παρατήρηση:

Να αποδειχθεί ότι

$$\sum_{i=1}^{n} L_i(x) = \sum_{i=0}^{n} \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} = 1.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=1 \in \mathbb{P}_0 \subset \mathbb{P}_n$

Το πολ. παρεμβολής της f στα x_i θα είναι

$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)$. Επειδή $f \in \mathbb{P}_n$ το $P_n \equiv f$, λόγω μοναδικότητας του πολ. παρεμβολής.

Επομένως $P_n(x) = 1$.

$$L_i(x) = \begin{cases} \dfrac{\phi(x)}{(x-x_i)\phi'(x_i)}, & x \neq x_i \\ 1, & x = x_i \end{cases}, \quad \text{όπου } \phi(x) = \prod_{i=0}^{n} (x-x_i)$$

$$\phi'(x) = \sum_{i=0}^{n} \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x-x_j), \quad \phi'(x_i) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x_i-x_j)$$

$$\sum_{i=0}^{n} L_i(x)\, x_i^k = x^k, \quad k \leq n$$

Έστω $P_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$ το πολ. παρ. της f στα $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$. Αν προσθέσω ένα ακόμη σημείο το x_n, το πολ. παρ στα σημεία $x_0, x_1, \dots, x_j$ το $P_n \in \mathbb{P}_n$ υπολογίζεται από την αρχή ανεξάρτητα από το P_{n-1}

Παράσταση Πολυωνύμου Παρεμβολής σε μορφή Newton:

Έστω $f \in C[a,b]$, $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a,b]$ διαφορετικά μεταξύ τους. Γράφουμε το πολυώνυμο παρ. της f στα $x_0, x_1, \dots, x_n$ ως

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$$

$$P_n(x_0) = f(x_0) = f_0, \quad P_n(x_0) = a_0 \Rightarrow a_0 = f_0$$

$$P_n(x_1) = f_1, \quad P_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) \Rightarrow a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f_1 \Leftrightarrow$$

$$a_1 = \frac{f_1 - a_0}{x_1 - x_0}$$

$$P_n(x_2) = f_2 = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

$$\Leftrightarrow a_2 = \left(\frac{f_2 - a_0}{x_2 - x_0} - a_1\right)\Big/(x_2 - x_1)$$

$$a_3 = \left(\left(\frac{f_3 - a_0}{x_3 - x_0} - a_1\right)\Big/(x_3 - x_1) - a_2\right)\Big/(x_3 - x_2)$$

x_i	-1	0	1	2
f_i	2	0	0	8

$$a_0 = f_0 = 2, \quad a_1 = \frac{f_1 - a_0}{x_2 - x_0} = \frac{0-2}{1} = -2$$

$$a_2 = \frac{0-2}{1+1} = -1, \quad a_3 = \left(\left(\frac{8-2}{2+1} - (-2)\right)\Big/(2-0) - (-1)\right)\Big/(2-1) = 1$$

$$P_3(x) = 2 - 2(x+1) - 1(x+1)x + 1(x+1)x(x-1) = 2 - 2x - 2 - x^2 - x + x^3 - x =$$
$$= x^3 - x^2$$

$$a_2 = \left(\frac{0-2}{1+1} - (-2)\Big/(2-0)\right) = 1$$

$$P_2(x) = 2 - 2(x+1) - 1(x+1)x + 1(x+1)x(x-1) = x^3 + x^2 - 2x$$

Διαιρεμένες Διαφορές:

Έστω $f \in C[a,b]$ και $x_0, x_1, \dots x_n \in [a,b]$, διαφ. μεταξύ τους. Ορίζουμε επαγωγικά ως προς i τη διαιρεμένη διαφορά τάξης i ως

$$\Delta^{(0)}[x_0](f) = f(x_0)$$

$$\Delta^{i}[x_0 x_1 \dots x_i](f) = \frac{\Delta^{i-1}[x_1, x_2 \dots x_i](f) - \Delta^{i-1}[x_0, x_1 \dots x_{i-1}]}{x_i - x_0}$$

$$\Delta^{1}[x_0, x_1](f) = \frac{\Delta^{0}[x_1](f) - \Delta^{0}[x_0](f)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0}$$

$$\Delta^{2}[x_0, x_1, x_2](f) = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$+ \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Αποδεικνύεται ότι $\Delta^{n}[x_0, x_1, \dots x_n] = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x_i - x_j)}$